

ESPACES DE BANACH STABLES

PAR

J.-L. KRIVINE ET B. MAUREY

ABSTRACT

We define the notion of "stable Banach space" by a simple condition on the norm. We prove that if E is a stable Banach space, then every subspace of $L^p(E)$ ($1 \leq p < \infty$) is stable. Our main result asserts that every infinite dimensional stable Banach space contains l^p , for some p , $1 \leq p < \infty$. This is a generalization of a theorem due to D. Aldous: every infinite dimensional subspace of L^1 contains l^p , for some p in the interval $[1, 2]$.

Introduction

L'origine de ce travail est un résultat récent de D. Aldous [1]: tout sous-espace de dimension infinie de L^1 contient un espace l^p pour un $p \geq 1$.

La preuve d'Aldous repose de façon essentielle sur des techniques probabilistes. Nous donnons ici une démonstration "abstraite" de son résultat, ce qui permet de voir qu'il est valable pour une classe d'espaces de Banach (caractérisée par une condition sur la norme) que nous appelons "espaces stables". (Cette terminologie est issue de la théorie des modèles, cf. les théories stables de S. Shelah; il en est de même de la notion de "type" qui joue un rôle essentiel dans ce travail; rôle qui est joué par les "mesures aléatoires" dans l'article d'Aldous.) Ces espaces stables semblent d'ailleurs présenter un certain intérêt en eux-mêmes.

Les espaces de dimension finie, les espaces L^p ($1 \leq p < \infty$) sont stables, et tout sous-espace d'un espace stable l'est aussi. De plus, si E est stable, $L^p(E)$ l'est également si $1 \leq p < \infty$.

Dans la partie I, on définit les espaces stables et les espaces de types; dans la partie II, on montre essentiellement le résultat qu'on vient d'indiquer sur $L^p(E)$. Dans la partie III, on étudie les opérations sur les types (essentiellement le "produit de convolution" qui est un prolongement aux types de l'addition dans l'espace de Banach). On donne aussi un critère pour que l'espace de Banach E

contienne l^p , sous forme de l'existence de certains types, appelés l^p -types. Dans la partie IV, on montre l'extension du théorème d'Aldous, à savoir: tout espace stable de dimension infinie contient l^p pour un $p \geq 1$.

Le lecteur intéressé principalement par ce résultat pourra laisser de côté la partie II, dont les parties III et IV ne dépendent pas.

Le présent article est le développement des résultats annoncés dans [10]. Entretemps, D. J. H. Garling a publié une version de ces résultats, assez différente de la nôtre [6].

Plusieurs résultats intéressants concernant les espaces stables ont été démontrés depuis la parution de [10]. Guerre et Lapresté ont montré dans [7] que les espaces stables sont faiblement séquentiellement complets. Il en résulte qu'un espace stable est réflexif dès qu'il ne contient pas de sous-espace isomorphe à l_1 . Raynaud a donné dans [14] de nouveaux exemples d'espaces stables: tout quotient de l_p est stable si $1 < p < \infty$, les espaces de Lorentz $L^{p,q}$ sont stables. Raynaud a par ailleurs donné pour les espaces super-stables un théorème de représentation analogue à notre corollaire du théorème II.3, et a montré que $L^p(E)$ ($1 \leq p < \infty$) est superstable lorsque E est superstable.

Partie I

Soit E un espace de Banach séparable. Pour chaque $a \in E$, soit $\tau_a : E \rightarrow \mathbf{R}_+$ la fonction définie par $\tau_a(x) = \|a + x\|$; τ_a est appelé le "type sur E réalisé par a ". Posons $\tilde{E} = \{\tau_a; a \in E\} \subset \mathbf{R}_+^E$. On munit \mathbf{R}_+^E de la topologie de la convergence simple sur E (topologie produit). L'application $a \rightarrow \tau_a$ est alors un homéomorphisme de E (muni de la topologie forte) sur \tilde{E} .

La fermeture de \tilde{E} dans \mathbf{R}_+^E sera appelée *espace des types sur E* et notée \mathcal{T} . Un type sur E est donc une fonction $\tau : E \rightarrow \mathbf{R}_+$ telle qu'il existe une suite $a_n \in E$ et un ultrafiltre \mathcal{U} sur \mathbf{N} tels que $\tau(x) = \lim_{\mathcal{U}} \|a_n + x\|$ pour tout $x \in E$. Notons que la suite a_n peut toujours être prise bornée dans E (elle est bornée "pour presque tout n " au sens de l'ultrafiltre \mathcal{U}). On a donc $\tau = \lim_{\mathcal{U}} \tau_{a_n}$ dans l'espace \mathcal{T} . Dans la suite on identifiera \tilde{E} et E , et on écrira donc $\tau = \lim_{\mathcal{U}} a_n$.

On pose $\mathcal{T}_r = \{\tau \in \mathcal{T}; \tau(0) \leq r\}$ pour $r \in \mathbf{R}_+$. Alors \mathcal{T}_r est compact: en effet, on a toujours $\tau(x) \leq \tau(0) + \|x\|$ pour $x \in E$ (c'est évident si $\tau \in \tilde{E}$, d'où le résultat par densité de E dans \mathcal{T}) donc \mathcal{T}_r est fermé dans le compact $\prod_{x \in E} [0, r + \|x\|]$.

L'espace \mathcal{T} est localement compact: en effet, si $\tau_0 \in \mathcal{T}$ et $\tau_0(0) < r$, alors $\{\tau \in \mathcal{T}; \tau(0) < r\}$ est un voisinage ouvert de τ_0 contenu dans le compact \mathcal{T}_r .

\mathcal{T} est métrisable et séparable: en effet, les types sur E sont des fonctions lipschitziennes: si $\sigma \in \mathcal{T}$, on a $|\sigma(x) - \sigma(y)| \leq \|x - y\|$ pour $x, y \in E$ (c'est

évident si $\sigma \in \tilde{E}$, d'où le résultat par densité de \tilde{E} dans \mathcal{F}). Il en résulte que, si Δ est une partie dénombrable dense de E , on peut considérer \mathcal{F} comme un sous-espace de \mathbf{R}^Δ muni de la topologie produit, qui est un espace métrisable et séparable.

DÉFINITION. L'espace de Banach séparable E sera dit *stable* si, quelles que soient les suites bornées $a_m, b_n \in E$ et les ultrafiltres \mathcal{U}, \mathcal{V} sur \mathbf{N} , on a

$$\lim_{\mathcal{V}} \lim_{\mathcal{U}} \|a_m + b_n\| = \lim_{\mathcal{U}} \lim_{\mathcal{V}} \|a_m + b_n\|.$$

(Il suffit évidemment qu'on ait cette égalité pour toutes les suites bornées a_m, b_n d'une partie dense de E .)

Il est clair que tout sous-espace d'un espace stable l'est aussi. Soient E un espace stable, σ, τ deux types sur E , avec $\sigma = \lim_{\mathcal{U}} a_m, \tau = \lim_{\mathcal{V}} b_n$ (a_m, b_n étant des suites bornées de E). On pose

$$[\sigma, \tau] = \lim_{\mathcal{V}} \lim_{\mathcal{U}} \|a_m + b_n\|$$

ce qui définit une application de $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ dans \mathbf{R}_+ . Toutefois, cette définition n'est valable qu'à condition de vérifier que: si $\sigma = \lim_{\mathcal{U}} a_m = \lim_{\mathcal{U}'} a'_m$ et $\tau = \lim_{\mathcal{V}} b_n = \lim_{\mathcal{V}'} b'_n$ (a_m, a'_m, b_n, b'_n suites bornées dans E ; $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{U}', \mathcal{V}'$ ultrafiltres sur \mathbf{N}) alors

$$\lim_{\mathcal{V}} \lim_{\mathcal{U}} \|a_m + b_n\| = \lim_{\mathcal{V}'} \lim_{\mathcal{U}'} \|a'_m + b'_n\|.$$

Or le premier membre est

$$\lim_{\mathcal{V}} \sigma(b_n) = \lim_{\mathcal{V}} \lim_{\mathcal{U}} \|a'_m + b_n\| = \lim_{\mathcal{U}'} \lim_{\mathcal{V}} \|a'_m + b_n\|$$

(par définition de la stabilité)

$$= \lim_{\mathcal{U}'} \tau(a'_m) = \lim_{\mathcal{U}'} \lim_{\mathcal{V}'} \|a'_m + b'_n\|$$

ce qui donne le résultat cherché en appliquant encore une fois la définition de la stabilité.

On a évidemment $[\sigma, \tau] = [\tau, \sigma]$ pour $\sigma, \tau \in \mathcal{F}$. La propriété essentielle de cette fonction est donnée par le

THÉORÈME. Pour σ fixé, la fonction $\tau \rightarrow [\sigma, \tau]$ est continue sur \mathcal{F} . Autrement dit, $[\sigma, \tau]$ est une fonction séparément continue sur $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$.

Cela résulte du lemme classique:

LEMME. Soient \mathcal{T} un espace métrique, D une partie dense de \mathcal{T} et $\phi : \mathcal{T} \rightarrow \mathbf{R}$ telle que: si $\tau \in \mathcal{T}$ et $\delta_n \in D$, $\delta_n \rightarrow \tau$, alors $\phi(\delta_n) \rightarrow \phi(\tau)$. Alors ϕ est continue sur \mathcal{T} .

On applique ce lemme avec $D = \hat{E}$ (espace des types réalisés dans E) $\phi(\tau)$ étant la fonction $\tau \rightarrow [\sigma, \tau]$. On vérifie l'hypothèse du lemme: soit $b_n \in E$ tels que $\tau_{b_n} \rightarrow \tau$. On a donc $\tau(x) = \lim \|b_n + x\|$ pour tout $x \in E$. Donc, par définition de $[\sigma, \tau]$, on a $[\sigma, \tau] = \lim_{\mathcal{U}} \sigma(b_n)$ quel que soit l'ultrafiltre \mathcal{U} non trivial sur \mathbf{N} ; ce qui implique que $\sigma(b_n) \rightarrow [\sigma, \tau]$, quand $n \rightarrow \infty$; autrement dit $[\sigma, \tau_{b_n}] \rightarrow [\sigma, \tau]$.
C.Q.F.D.

Le théorème suivant donne une définition de la stabilité qui ne fait pas intervenir d'ultrafiltre.

THÉORÈME. Pour un espace de Banach séparable E , les conditions suivantes sont équivalentes:

- (1) E est stable.
- (2) Quelles que soient les suites bornées $a_m, b_n \in E$, il existe deux ultrafiltres \mathcal{U}, \mathcal{V} non triviaux sur \mathbf{N} tels que

$$\lim_{\mathcal{V}} \lim_{\mathcal{U}} \|a_m + b_n\| = \lim_{\mathcal{U}} \lim_{\mathcal{V}} \|a_m + b_n\|.$$

- (3) Quelles que soient les suites bornées $a_m, b_n \in E$, on a

$$\sup_{m < n} \|a_m + b_n\| \geq \inf_{m > n} \|a_m + b_n\|.$$

Evidemment (1) \Rightarrow (2); (2) \Rightarrow (3) car

$$\sup_{m < n} \|a_m + b_n\| \geq \lim_{\mathcal{U}} \lim_{\mathcal{V}} \|a_m + b_n\| = \lim_{\mathcal{V}} \lim_{\mathcal{U}} \|a_m + b_n\| \geq \inf_{m > n} \|a_m + b_n\|.$$

Reste à montrer que (3) \Rightarrow (1):

On suppose donc que l'on a

$$\lim_{\mathcal{V}} \lim_{\mathcal{U}} \|a_m + b_n\| \neq \lim_{\mathcal{U}} \lim_{\mathcal{V}} \|a_m + b_n\|,$$

et que, pour fixer les idées, le premier membre est strictement supérieur au second. On a donc

$$\lim_{\mathcal{V}} \lim_{\mathcal{U}} \|a_m + b_n\| > c > d > \lim_{\mathcal{U}} \lim_{\mathcal{V}} \|a_m + b_n\|.$$

Il existe donc $X \in \mathcal{U}$ et $Y \in \mathcal{V}$ tels que:

$$n \in Y \Rightarrow \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ \mathcal{U}}} \|a_m + b_n\| > c; \quad m \in X \Rightarrow \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \mathcal{V}}} \|a_m + b_n\| < d.$$

On définit deux suites d'entiers $m_0, m_1, \dots, m_k, \dots; n_0, n_1, \dots, n_k, \dots$ et deux suites décroissantes de parties de \mathbb{N} :

$$Y = Y_0 \supset Y_1 \supset \dots \supset Y_k \supset \dots, \quad X \supset X_0 \supset X_1 \supset \dots \supset X_k \supset \dots;$$

$X_k \in \mathcal{U}, Y_k \in \mathcal{V}$, ceci par récurrence sur k : on choisit $n_0 \in Y_0 = Y$; on pose $X_0 = X \cap \{m \in \mathbb{N}; \|a_m + b_{n_0}\| > c\}$ puis on choisit $m_0 \in X_0$; on pose $Y_1 = Y_0 \cap \{n \in \mathbb{N}; \|a_{m_0} + b_n\| < d\}$ (noter que $m_0 \in X$, donc $Y_1 \in \mathcal{V}$).

En général, ayant défini X_{k-1} et Y_k , on choisit $n_k \in Y_k$; on pose $X_k = X_{k-1} \cap \{m \in \mathbb{N}; \|a_m + b_{n_k}\| > c\}$ (noter que $n_k \in Y$, donc $X_k \in \mathcal{U}$); puis on choisit $m_k \in X_k$ et on pose $Y_{k+1} = Y_k \cap \{n \in \mathbb{N}; \|a_{m_k} + b_n\| < d\}$. On a donc $m_k \in X_k, n_k \in Y_k$ pour tout k ; si $k \leq l$, on a $m_l \in X_k$ (car $m_l \in X_l \subset X_k$) et donc $\|a_{m_l} + b_{n_k}\| > c$; donc $\inf_{k \leq l} \|a_{m_l} + b_{n_k}\| \geq c$; si $k > l$, on a $n_k \in Y_{l+1}$ (car $n_k \in Y_k \subset Y_{l+1}$) donc $\|a_{m_l} + b_{n_k}\| < d$. Par suite, $\sup_{k > l} \|a_{m_l} + b_{n_k}\| \leq d$. On a donc $\sup_{l < k} \|a_{m_l} + b_{n_k}\| < \inf_{k \leq l} \|a_{m_l} + b_{n_k}\|$ ce qui contredit (3). C.Q.F.D.

Pour terminer cette section, on donne quelques exemples simples:

c_0 n'est pas stable: soient e_n la base canonique de c_0 , et $f_n = e_0 + e_1 + \dots + e_n$; on a $\|e_m + f_n\| = 2$ si $m < n, = 1$ si $m > n$, donc la condition (3) du théorème précédent n'est pas satisfaite.

Plus généralement, un espace X isomorphe à c_0 n'est pas stable. C'est clair d'après ce qui précède si $d(X, c_0) < 2$. Dans le cas général, on utilise le fait que, si X est isomorphe à c_0 , il contient pour tout $\varepsilon > 0$ un sous-espace $(1 + \varepsilon)$ -isomorphe à c_0 ([8] ou [11], p. 97).

Tout espace de dimension finie est stable

l_2 est stable. Puisque $\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 = 2\langle x, y \rangle$, on aura en posant

$$a = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ \mathcal{U}}} a_m, \quad b = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \mathcal{V}}} b_n \quad (\text{limites faibles}),$$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ \mathcal{U}}} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \mathcal{V}}} (\|a_m + b_n\|^2 - \|a_m\|^2 - \|b_n\|^2) &= \langle a, b \rangle \\ &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \mathcal{V}}} \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ \mathcal{U}}} (\|a_m + b_n\|^2 - \|a_m\|^2 - \|b_n\|^2). \end{aligned}$$

L^1 est stable: en effet, la fonction $e^{-\|x-y\|}$ est de type positif sur L^1 . Donc il existe une application U de L^1 dans la boule unité d'un espace de

Hilbert H telle que $e^{-\|x-y\|} = \langle U(x), U(y) \rangle$ pour $x, y \in L^1$. Soient alors a_m, b_n deux suites bornées de L^1 , \mathcal{U} et \mathcal{V} des ultrafiltres sur \mathbb{N} ; posons $\xi = \lim_{\mathcal{U}} U(a_m)$; $\eta = \lim_{\mathcal{V}} U(b_n)$ (limites pour la topologie faible dans la boule unité de H). On a alors immédiatement:

$$\lim_{\mathcal{U}} \lim_{\mathcal{V}} e^{-\|a_m - b_n\|} = \langle \xi, \eta \rangle = \lim_{\mathcal{V}} \lim_{\mathcal{U}} e^{-\|a_m - b_n\|}.$$

Il en résulte que

$$\lim_{\mathcal{U}} \lim_{\mathcal{V}} \|a_m - b_n\| = \lim_{\mathcal{V}} \lim_{\mathcal{U}} \|a_m - b_n\| = -\text{Log} \langle \xi, \eta \rangle. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

En fait, l'espace L^p est stable pour $1 \leq p < +\infty$: pour $1 \leq p \leq 2$, cela résulte du fait que L^p est isométrique à un sous-espace de L^1 ([3] ou [12] p. 212). Dans le cas général, cela résulte de théorème II.2.

Partie II

Dans cette section, on donne deux théorèmes permettant de construire des espaces stables:

THÉOREME II.1. *Soit E_n ($n \in \mathbb{N}$) une suite d'espaces de Banach stables. Pour $1 \leq p < +\infty$, la l^p -somme de ces espaces est un espace de Banach stable.*

Soit E la l^p -somme des E_n . Donc, si $f \in E$, on a $f \in \prod_{i \in \mathbb{N}} E_i$ et $\|f\|^p = \sum_{i=0}^{\infty} \|f(i)\|^p$. Les $f \in E$ telles que $f(i) = 0$ sauf pour un nombre fini d'entiers i forment un sous-espace dense D de E .

Soient f_m, g_n deux suites de D , $\|f_m\|, \|g_n\| \leq 1$ et \mathcal{U}, \mathcal{V} deux ultrafiltres sur \mathbb{N} . On pose

$$\lim_{\mathcal{U}} \sum_{i \in j} \|f_m(i)\|^p = \alpha_j; \quad \lim_{\mathcal{V}} \sum_{i \in j} \|g_n(i)\|^p = \beta_j.$$

Quand $j \rightarrow \infty$, $\alpha_j \downarrow \alpha$ et $\beta_j \downarrow \beta$. Pour $\varepsilon > 0$, fixé, il existe donc N_0 tel que $\alpha \leq \alpha_j \leq \alpha + \varepsilon^p$, $\beta \leq \beta_j \leq \beta + \varepsilon^p$ pour tout $j \geq N_0$. On a donc

$$\lim_{\mathcal{U}} \sum_{N_0 < i < j} \|f_m(i)\|^p \leq \varepsilon^p; \quad \lim_{\mathcal{V}} \sum_{N_0 < i < j} \|g_n(i)\|^p \leq \varepsilon^p \quad \text{pour tout } j > N_0.$$

On a

$$\|f_m + g_n\|^p = \sum_{i \leq N_0} \|f_m(i) + g_n(i)\|^p + \sum_{N_0 < i < j} \|f_m(i) + g_n(i)\|^p + \sum_{i \geq j} \|f_m(i) + g_n(i)\|^p.$$

On fixe un entier m ; pour j assez grand, on a $f_m(i) = 0$ si $i \geq j$, donc

$$\sum_{i \geq j} \|f_m(i) + g_n(i)\|^p = \sum_{i \geq j} \|g_n(i)\|^p.$$

Pour un tel choix de j , on a donc

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \mathcal{V}}} \|f_m + g_n\|^p = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \mathcal{V}}} \left(\sum_{i \leq N_0} \|f_m(i) + g_n(i)\|^p + \sum_{N_0 < i < j} \|f_m(i) + g_n(i)\|^p \right) + \beta_j.$$

Or on a (inégalité triangulaire dans E):

$$\left| \left(\sum_{N_0 < i < j} \|f_m(i) + g_n(i)\|^p \right)^{1/p} - \left(\sum_{N_0 < i < j} \|f_m(i)\|^p \right)^{1/p} \right| \leq \left(\sum_{N_0 < i < j} \|g_n(i)\|^p \right)^{1/p}.$$

On fait tendre n vers $+\infty$ suivant l'ultrafiltre \mathcal{V} . On a vu que le second membre a alors une limite $\leq \varepsilon$. Donc, en appliquant l'inégalité $|a^p - b^p| \leq p|a - b| \sup(a^{p-1}, b^{p-1})$ ($a, b \in \mathbb{R}_+$) et en remarquant que

$$\left(\sum_i \|f_m(i)\|^p \right)^{1/p} \leq 1, \quad \left(\sum_i \|g_n(i)\|^p \right)^{1/p} \leq 1 \quad \text{et} \quad \left(\sum_i \|f_m(i) + g_n(i)\|^p \right)^{1/p} \leq 2,$$

on trouve

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \mathcal{V}}} \left| \sum_{N_0 < i < j} \|f_m(i) + g_n(i)\|^p - \sum_{N_0 < i < j} \|f_m(i)\|^p \right| \leq 2^{p-1} p \varepsilon.$$

Mais, par le choix de j , on a $\sum_{N_0 < i < j} \|f_m(i)\|^p = \sum_{N_0 < i} \|f_m(i)\|^p$. On obtient donc

$$\left| \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \mathcal{V}}} \|f_m + g_n\|^p - \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \mathcal{V}}} \sum_{i \leq N_0} \|f_m(i) + g_n(i)\|^p - \sum_{i > N_0} \|f_m(i)\|^p - \beta_j \right| \leq 2^{p-1} p \varepsilon.$$

En faisant tendre j vers $+\infty$, on peut remplacer β_j par β dans cette inégalité. On fait alors tendre m vers $+\infty$ suivant l'ultrafiltre \mathcal{U} ; on a:

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ \mathcal{U}}} \sum_{i > N_0} \|f_m(i)\|^p = \alpha_{N_0}$$

et, par le choix de N_0 , on a $|\alpha_{N_0} - \alpha| \leq \varepsilon^p$. Donc:

$$\left| \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ \mathcal{U}}} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \mathcal{V}}} \|f_m + g_n\|^p - \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ \mathcal{U}}} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \mathcal{V}}} \sum_{i \leq N_0} \|f_m(i) + g_n(i)\|^p - \alpha - \beta \right| \leq \varepsilon^p + 2^{p-1} p \varepsilon.$$

On montre de même l'inégalité obtenue en intervertissant $\lim_{\mathcal{U}}$ et $\lim_{\mathcal{V}}$. Mais, comme chaque E_i est stable, on a

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ \mathcal{U}}} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \mathcal{V}}} \sum_{i \leq N_0} \|f_m(i) + g_n(i)\|^p = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \mathcal{V}}} \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ \mathcal{U}}} \sum_{i \leq N_0} \|f_m(i) + g_n(i)\|^p.$$

Quand $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient donc

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ \alpha}} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \gamma}} \|f_m + g_n\|^p = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \gamma}} \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ \alpha}} \|f_m + g_n\|^p. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

On se propose maintenant de montrer le

THÉORÈME II.2. *Si E est un espace de Banach stable alors $L^p(E)$ l'est aussi pour $1 \leq p < +\infty$.*

Pour cela, on montre d'abord un théorème de représentation des fonctions séparément continues sur un produit de compacts métrisables.

THÉORÈME II.3. *Soit $\phi : K \times K' \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction séparément continue bornée, K et K' étant des compacts métrisables. Alors il existe un espace de Banach réflexif \mathcal{E} et deux applications bornées $U : K \rightarrow \mathcal{E}$, $V : K' \rightarrow \mathcal{E}^*$ telles que $\phi(x, y) = \langle U(x), V(y) \rangle$ quels que soient $x \in K$, $y \in K'$.*

LEMME II.1. *Avec les hypothèses du théorème II.3, la fonction ϕ est de première classe de Baire (limite d'une suite de fonctions continues sur $K \times K'$).*

Soit d une distance sur K ; pour $a \in K$, soit $\chi_a^n(x) = \sup\{1/n - d(a, x), 0\}$ qui est continue sur K , > 0 pour $d(a, x) \leq 1/2n$ et nulle pour $d(a, x) \geq 1/n$. Soit $(a_i^n)_{i \in I_n}$ une famille finie de points de K , telle que tout point de K soit à une distance $\leq 1/2n$ de l'un d'eux. Posons $f_i^n(x) = \chi_{a_i^n}(x) / \sum_{j \in I_n} \chi_{a_j^n}(x)$. La famille $(f_i^n)_{i \in I_n}$ forme, pour chaque n , une partition de l'unité sur K . On pose alors $\phi_n(x, y) = \sum_{i \in I_n} \phi(a_i^n, y) f_i^n(x)$. Il est clair que $\phi_n(x, y)$ est continue sur $K \times K'$ et on vérifie aisément que, pour y fixé, $\phi_n(x, y)$ converge (uniformément en x) vers $\phi(x, y)$. C.Q.F.D.

On définit alors un opérateur linéaire $T : \mathcal{C}(K)^* \rightarrow \mathcal{C}(K')$ en posant $(T\mu)(y) = \int_K \phi(x, y) \mu(dx)$ pour toute mesure bornée μ sur K ($\mu \in \mathcal{C}(K)^*$). Comme ϕ est continue en y pour chaque x fixé dans K , et bornée, une application immédiate du théorème de Lebesgue montre que $(T\mu)(y)$ est une fonction continue de y .

Si $\nu \in \mathcal{C}(K')^*$, on a

$$\langle T\mu, \nu \rangle = \int_{K'} \nu(dy) \int_K \phi(x, y) \mu(dx) = \int_K \mu(dx) \int \phi(x, y) \nu(dy)$$

d'après le théorème de Fubini (applicable puisque ϕ est borélienne sur $K \times K'$). Comme $\langle T\mu, \nu \rangle = \langle \mu, T^*\nu \rangle$, on voit que $T^*\nu$ est la fonction $x \rightarrow \int_{K'} \phi(x, y) \nu(dy)$ qui est continue sur K (même preuve que précédemment). T^* envoie donc $\mathcal{C}(K')^*$ dans $\mathcal{C}(K)$. Il en résulte que T est un opérateur faiblement compact

(remarque: on voit facilement que la réciproque est vraie à savoir que, si $U : \mathcal{C}(K)^* \rightarrow \mathcal{C}(K')$ est faiblement compact, il y a une fonction $\psi : K \times K' \rightarrow \mathbf{R}$ séparément continue bornée, telle que $(U\mu)(y) = \int_K \psi(x, y)\mu(dx)$). D'après [5], T se factorise par un espace réflexif \mathcal{E} . On a donc $T = h \circ j$, $j : \mathcal{C}(K)^* \rightarrow \mathcal{E}$, $h : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{C}(K')$; δ_x désignant la mesure de Dirac au point x , on a alors

$$\phi(x, y) = \langle T\delta_x, \delta_y \rangle = \langle h \circ j\delta_x, \delta_y \rangle = \langle j\delta_x, h^* \delta_y \rangle$$

ce qui montre le théorème II.3 avec $U(x) = j\delta_x$, $V(y) = h^* \delta_y$. C.Q.F.D.

COROLLAIRE. *Pour que l'espace de Banach E soit stable, il faut et il suffit qu'il existe deux applications bornées $U : B \rightarrow \mathcal{E}$, $V : B \rightarrow \mathcal{E}^*$, B étant une partie dense de la boule unité de E et \mathcal{E} un espace réflexif, telles que $\|x + y\|^p = \langle U(x), V(y) \rangle$ pour $x, y \in B$ (p réel > 0).*

La condition est nécessaire: si E est stable, soient \mathcal{T} l'espace des types sur E , et $\mathcal{T}_1 = \{\tau \in \mathcal{T}; \tau(0) \leq 1\}$: \mathcal{T}_1 est compact et $B \subset \mathcal{T}_1$. En appliquant le théorème II.3 à la fonction $[\sigma, \tau]^p$ séparément continue sur $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_1$, on voit qu'il existe un espace réflexif \mathcal{E} et deux applications bornées $U : \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{E}$, $V : \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{E}^*$ telles que $[\sigma, \tau]^p = \langle U(\sigma), V(\tau) \rangle$; en particulier, en prenant pour σ, τ les types réalisés par $x, y \in B$, on a $\|x + y\|^p = \langle U(x), V(y) \rangle$.

La condition est suffisante: soient $x_m, y_n \in B$ et \mathcal{U}, \mathcal{V} deux ultrafiltres sur \mathbf{N} . Les parties bornées de $\mathcal{E}, \mathcal{E}^*$ étant relativement faiblement compactes, il existe $\xi \in \mathcal{E}, \eta \in \mathcal{E}^*$ tels que $U(x_m) \rightarrow_{\mathcal{U}} \xi$; $V(y_n) \rightarrow_{\mathcal{V}} \eta$ (limites faibles). Alors

$$\lim_{\mathcal{U}} \lim_{\mathcal{V}} \|x_m + y_n\|^p = \lim_{\mathcal{U}} \lim_{\mathcal{V}} \langle U(x_m), V(y_n) \rangle = \langle \xi, \eta \rangle$$

et de même

$$\lim_{\mathcal{V}} \lim_{\mathcal{U}} \|x_m + y_n\|^p = \langle \xi, \eta \rangle$$

ce qui montre que E est stable.

LEMME II.2. *Soient E un espace de Banach stable, \mathcal{T} l'espace des types, $\bar{\mathcal{T}}$ le compactifié d'Alexandroff, et $1 \leq p < 2$. Alors on a*

$$\|x + y\|^p - \|x\|^p - \|y\|^p = (\|x\| \|y\|)^{p/2} \phi(x, y) \quad \text{où } \phi : E \times E \rightarrow \mathbf{R}$$

a un prolongement borné séparément continu sur $\bar{\mathcal{T}} \times \bar{\mathcal{T}}$.

(On rappelle que E est un sous-espace dense de \mathcal{T} .)

Il existe $C > 0$ (dépendant de p) tel que l'on ait

$$||t + u|^p - |t|^p - |u|^p| \leq C(|u| |t|^{p-1} \wedge |t| |u|^{p-1}) \quad \text{pour } t, u \in \mathbf{R}.$$

Il en résulte que, pour $x, y \in E$ on a

$$||x + y|^p - |x|^p - |y|^p| \leq C(\|x\| \|y\|^{p-1} \wedge \|y\| \|x\|^{p-1})$$

(en effet, si $\|x + y\|^p - \|x\|^p - \|y\|^p \geq 0$ on a

$$\|x + y\|^p - \|x\|^p - \|y\|^p \leq (\|x\| + \|y\|)^p - \|x\|^p - \|y\|^p$$

et on applique l'inégalité précédente; si $\|x + y\|^p - \|x\|^p - \|y\|^p \leq 0$, on a

$$0 \leq \|x\|^p + \|y\|^p - \|x + y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p - \left| \|x\| - \|y\| \right|^p$$

et on applique de nouveau l'inégalité précédente).

Autrement dit, si $x, y \neq 0$, on a

avec
$$\|x + y\|^p - \|x\|^p - \|y\|^p = \|x\|^{p/2} \|y\|^{p/2} \phi(x, y)$$

(1)
$$|\phi(x, y)| \leq C((\|x\|/\|y\|)^{1-p/2} \wedge (\|y\|/\|x\|)^{1-p/2}).$$

On désigne par $\mathbf{0}$ le type réalisé par 0 . La fonction

$$\phi(x, y) = (\|x + y\|^p - \|x\|^p - \|y\|^p) \|x\|^{-p/2} \|y\|^{-p/2}$$

définie sur $(E - \{0\}) \times (E - \{0\})$ a un prolongement séparément continu à $(\mathcal{T} - \{\mathbf{0}\}) \times (\mathcal{T} - \{\mathbf{0}\})$ donné par

$$\phi(\sigma, \tau) = ((\sigma, \tau)^p - \sigma(0)^p - \tau(0)^p) \sigma(0)^{-p/2} \tau(0)^{-p/2}.$$

Comme $E - \{0\}$ est dense dans $\mathcal{T} - \{\mathbf{0}\}$ on a, d'après (1):

(2)
$$|\phi(\sigma, \tau)| \leq C((\sigma(0)/\tau(0))^{1-p/2} \wedge (\tau(0)/\sigma(0))^{1-p/2})$$

et par suite $|\phi(\sigma, \tau)| \leq C$.

On a $\tilde{\mathcal{T}} = \mathcal{T} \cup \{\infty\}$. On prolonge $\phi(\sigma, \tau)$ à $\tilde{\mathcal{T}} \times \tilde{\mathcal{T}}$ en posant $\phi(\sigma, \tau) = 0$ si σ ou τ est soit $\mathbf{0}$, soit ∞ . On a donc ainsi une fonction bornée sur $\tilde{\mathcal{T}} \times \tilde{\mathcal{T}}$. Par ailleurs, grâce à l'inégalité (2) (en remarquant que $1 - p/2 > 0$) on voit immédiatement que ce prolongement est encore séparément continu (si $\sigma \rightarrow \mathbf{0}$ ou ∞ , alors $\sigma(0) \rightarrow 0$ ou ∞ , donc, τ restant fixe, $\phi(\sigma, \tau) \rightarrow 0$). C.Q.F.D.

LEMME II.3. Soient E un espace de Banach stable, $\tilde{\mathcal{T}}$ le compactifié d'Alexandroff de l'espace des types, et $p \geq 1$. On a alors

$$\|x + y\|^p - \|x\|^p - \|y\|^p = \sum_{i=1}^k \|x\|^{\alpha_i} \|y\|^{p-\alpha_i} \phi_i(x, y) \quad \text{pour } x, y \in E,$$

avec $0 < \alpha_i < p$, et $\phi_i : E \times E \rightarrow \mathbf{R}$ a un prolongement séparément continu borné sur $\tilde{\mathcal{F}} \times \tilde{\mathcal{F}}$.

Si $1 \leq p < 2$, le lemme précédent donne le résultat (avec $k = 1$, $\alpha_i = p/2$). Il suffit donc de montrer que, si le lemme est vrai pour p , il l'est pour $2p$. Or on a

$$\|x + y\|^p = \|x\|^p + \|y\|^p + \sum_{i=1}^k \|x\|^{\alpha_i} \|y\|^{p-\alpha_i} \phi_i(x, y)$$

donc

$$\|x + y\|^{2p} = \|x\|^{2p} + \|y\|^{2p} + S$$

où S est une somme de carrés de termes de la forme $\|x\|^{\alpha_i} \|y\|^{p-\alpha_i} \phi_i(x, y)$ et de doubles produits. On vérifie aisément que chacun de ces termes est de la forme voulue. C.Q.F.D.

LEMME II.4. Soient E un espace de Banach stable et $p \geq 1$. Alors il existe des espaces réflexifs \mathcal{E}_i ($1 \leq i \leq k$), des réels α_i ($0 < \alpha_i < p$) et des applications $U_i : E \rightarrow \mathcal{E}_i$, $V_i : E \rightarrow \mathcal{E}_i^*$ tels que l'on ait pour $x, y \in E$:

$$\|x + y\|^p - \|x\|^p - \|y\|^p = \sum_{i=1}^k \langle U_i(x), V_i(y) \rangle$$

et

$$\|U_i(x)\| \leq C \|x\|^{\alpha_i}; \quad \|V_i(y)\| \leq C \|y\|^{p-\alpha_i}.$$

D'après le lemme précédent, on a

$$\|x + y\|^p - \|x\|^p - \|y\|^p = \sum_{i=1}^k \|x\|^{\alpha_i} \|y\|^{p-\alpha_i} \phi_i(x, y),$$

ϕ_i ayant un prolongement séparément continu borné à l'espace compact métrisable $\tilde{\mathcal{F}} \times \tilde{\mathcal{F}}$. D'après le théorème II.3, il existe un espace réflexif \mathcal{E}_i , et deux applications bornées $u_i : \tilde{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{E}_i$, $v_i : \tilde{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{E}_i^*$ telles que l'on ait $\phi_i(x, y) = \langle u_i(x), v_i(y) \rangle$ pour $x, y \in E$ (en fait, pour $x, y \in \tilde{\mathcal{F}}$). Il suffit de poser $U_i(x) = \|x\|^{\alpha_i} u_i(x)$; $V_i(y) = \|y\|^{p-\alpha_i} v_i(y)$ pour avoir le résultat cherché. C.Q.F.D.

On peut alors démontrer le théorème II.2; soient E un espace de Banach stable, p un réel ≥ 1 ; $L^p(E)$ est le complété de l'espace des fonctions en escalier $f : [0, 1] \rightarrow E$ pour la norme $\|f\|_{L^p(E)} = (\int_0^1 \|f(t)\|^p dt)^{1/p}$. Soient donc \mathcal{U}, \mathcal{V} deux ultrafiltres sur \mathbf{N} et f_m, g_n deux suites de fonctions en escalier sur $[0, 1]$ à valeurs dans E , $\|f_m\|_{L^p(E)}, \|g_n\|_{L^p(E)} \leq 1$. On se propose de montrer que

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ \mathcal{U}}} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \mathcal{V}}} \|f_m + g_n\|_{L^p(E)} = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \mathcal{V}}} \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ \mathcal{U}}} \|f_m + g_n\|_{L^p(E)}$$

ou, ce qui revient au même:

$$\lim_{\mathcal{U}} \lim_{\mathcal{V}} (\|f_m + g_n\|^p - \|f_m\|^p - \|g_n\|^p) = \lim_{\mathcal{V}} \lim_{\mathcal{U}} (\|f_m + g_n\|^p - \|f_m\|^p - \|g_n\|^p).$$

Or on a d'après le lemme II.4:

$$\begin{aligned} \|f_m + g_n\|^p - \|f_m\|^p - \|g_n\|^p &= \int_0^1 (\|f_m(t) + g_n(t)\|^p - \|f_m(t)\|^p - \|g_n(t)\|^p) dt \\ &= \sum_{i=1}^k \int_0^1 \langle U_i \circ f_m(t), V_i \circ g_n(t) \rangle dt \end{aligned}$$

(noter que toutes les fonctions qui apparaissent sous le signe \int sont des fonctions en escalier sur $[0, 1]$).

Il suffit donc de montrer que

$$\lim_{\mathcal{U}} \lim_{\mathcal{V}} \int_0^1 \langle U_i \circ f_m(t), V_i \circ g_n(t) \rangle dt = \lim_{\mathcal{V}} \lim_{\mathcal{U}} \int_0^1 \langle U_i \circ f_m(t), V_i \circ g_n(t) \rangle dt.$$

Or, $U_i \circ f_m, V_i \circ g_n$ sont des fonctions en escalier sur $[0, 1]$ à valeurs dans \mathcal{E}_i (resp. \mathcal{E}_i^*). On a $\|U_i \circ f_m(t)\| \leq C \|f_m(t)\|^{p_i}$; $\|V_i \circ g_n(t)\| \leq C \|g_n(t)\|^{q_i}$. On pose $p_i = p/\alpha_i > 1$ et $q_i = p/(p - \alpha_i)$ (p_i, q_i sont conjugués). Comme $\|f_m\|_{L^{p_i}(E)} = \int_0^1 \|f_m(t)\|^{p_i} dt \leq 1$, on voit que $\|U_i \circ f_m\|_{L^{p_i}(\mathcal{E}_i)} \leq C$. De même $\|V_i \circ g_n\|_{L^{q_i}(\mathcal{E}_i^*)} \leq C$. On pose $\mathcal{F} = L^{p_i}(\mathcal{E}_i)$. \mathcal{E}_i étant réflexif et $p_i > 1$, on sait que \mathcal{F} est réflexif, et que $\mathcal{F}^* = L^{q_i}(\mathcal{E}_i^*)$. Par ailleurs, $U_i \circ f_m \in \mathcal{F}, V_i \circ g_n \in \mathcal{F}^*$ et on a

$$\int_0^1 \langle U_i \circ f_m(t), V_i \circ g_n(t) \rangle dt = \langle U_i \circ f_m, V_i \circ g_n \rangle.$$

La boule de rayon C de \mathcal{F} est faiblement compacte, donc $U_i \circ f_m$ a une limite faible ξ suivant l'ultrafiltre \mathcal{U} ; de même $V_i \circ g_n$ a une limite faible η suivant l'ultrafiltre \mathcal{V} . On a donc immédiatement

$$\lim_{\mathcal{U}} \lim_{\mathcal{V}} \langle U_i \circ f_m, V_i \circ g_n \rangle = \langle \xi, \eta \rangle = \lim_{\mathcal{U}} \lim_{\mathcal{V}} \langle U_i \circ f_m, V_i \circ g_n \rangle. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Partie III. Opérations sur les types

Soient $E \subset F$ deux espaces de Banach, σ un type sur E et $\xi \in F$. On dit que ξ réalise le type σ sur E si on a $\|\xi + x\| = \sigma(x)$ pour tout $x \in E$. Il résulte immédiatement de la définition des types sur E que tout élément d'une ultrapuissance de E réalise un type sur E , et réciproquement, que tout type sur E est réalisé dans une ultrapuissance de E .

Si σ est un type sur E et $\lambda \in \mathbf{R}$, on définit le type $\lambda\sigma$ en posant: $\lambda\sigma = \mathbf{0}$ si $\lambda = 0$ ($\mathbf{0}$ est le type nul sur E , c'est-à-dire celui réalisé par 0); $(\lambda\sigma)(x) = |\lambda| \sigma(x/|\lambda|)$ pour $x \in E$ si $\lambda \neq 0$. Il est clair que, si σ est réalisé par $\xi \in F$, alors $\lambda\sigma$ est réalisé par $\lambda\xi$.

Considérons maintenant un espace stable E , $a \in E$ et σ un type sur E . On définit un type noté $\sigma * a$ en posant pour tout $x \in E$: $(\sigma * a)(x) = \sigma(a + x)$; si $\sigma = \lim_{\mathcal{U}} a_m$ ($a_m \in E$, \mathcal{U} ultrafiltre sur \mathbf{N}) on a $(\sigma * a)(x) = \lim_{\mathcal{U}} \|a_m + a + x\|$ ce qui montre que $\sigma * a$ est bien un type sur E ; et aussi que $(\sigma * a)(b) = (\sigma * b)(a)$.

Soit $\tau = \lim_{\mathcal{V}} b_n$ un autre type sur E ($b_n \in E$, \mathcal{V} ultrafiltre sur \mathbf{N}). On définit alors le "produit de convolution" des deux types σ, τ qui est un type sur E noté $\sigma * \tau$ en posant $(\sigma * \tau)(x) = [\sigma * x, \tau]$ pour tout $x \in E$. Par définition du [], on a $(\sigma * \tau)(x) = \lim_{\mathcal{V}} (\sigma * x)(b_n)$ donc $(\sigma * \tau)(x) = \lim_{\mathcal{V}} (\sigma * b_n)(x)$ pour tout $x \in E$. Cela montre que $\sigma * \tau$ est un type sur E , puisque c'est la limite, suivant \mathcal{V} , de la suite de types $\sigma * b_n$. De plus, cette égalité s'écrit

$$(\sigma * \tau)(x) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \mathcal{V}}} \sigma(b_n + x) = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ \mathcal{U}}} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \mathcal{V}}} \|a_m + b_n + x\|.$$

D'après la stabilité de l'espace E , on en déduit

$$(\sigma * \tau)(x) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \mathcal{V}}} \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ \mathcal{U}}} \|a_m + b_n + x\| = [\tau * x, \sigma].$$

Il en résulte que $\sigma * \tau = \tau * \sigma$, le produit de convolution est commutatif.

Le produit de convolution est une application séparément continue de $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ dans \mathcal{T} : en effet, il suffit de vérifier que, pour σ et x fixés respectivement dans \mathcal{T} et E , $(\sigma * \tau)(x)$ est fonction continue de τ ; ce qui est clair puisque $(\sigma * \tau)(x) = [\sigma * x, \tau]$.

Si $a \in E$, on a $(\sigma * \tau) * a = \sigma * (\tau * a)$: en effet, pour $x \in E$, on a $((\sigma * \tau) * a)(x) = (\sigma * \tau)(x + a) = [\sigma * (x + a), \tau] = [(\sigma * x) * a, \tau] = [\sigma * x, \tau * a] = (\sigma * (\tau * a))(x)$.

Si maintenant on prend $\sigma' \in \mathcal{T}$, on a $(\sigma' * \sigma) * \tau = \lim_{\mathcal{V}} (\sigma' * \sigma) * b_n$ (continuité séparée du produit de convolution) $= \lim_{\mathcal{V}} \sigma' * (\sigma * b_n) = \sigma' * \lim_{\mathcal{V}} (\sigma * b_n) = \sigma' * (\sigma * \tau)$. Le produit de convolution est donc associatif.

Notons également les identités $[\lambda\sigma, \lambda\tau] = \lambda[\sigma, \tau]$; $(\lambda\sigma) * (\lambda\tau) = \lambda(\sigma * \tau)$ pour $\lambda \in \mathbf{R}$.

Considérons un espace stable E et une suite $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k, \dots$ de types sur E . Soient $F \supset E$ un espace de Banach, et $\xi_1, \dots, \xi_k, \dots \in F$. On dira que (ξ_k) est une suite de vecteurs indépendants sur E , réalisant respectivement les types σ_k sur E si on a:

$$(i) \quad \|x + \lambda_1 \xi_1 + \dots + \lambda_k \xi_k\| = (\lambda_1 \sigma_1 * \dots * \lambda_k \sigma_k)(x)$$

pour $x \in E$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbf{R}$.

Il est clair que l'espace de Banach engendré par $E, \xi_1, \dots, \xi_k, \dots$ est alors unique (à isométrie près).

Il existe un tel espace (autrement dit (i) définit bien une semi-norme); en effet, par récurrence, supposons construit l'espace E_k engendré par E, ξ_1, \dots, ξ_k satisfaisant (i). On a $\sigma_{k+1} = \lim_{\mathcal{U}} a_n$ ($a_n \in E, \mathcal{U}$ ultrafiltre sur \mathbf{N}). On définit $E_{k+1} = E_k \oplus \mathbf{R}\xi_{k+1}$ (espace vectoriel obtenu en ajoutant une dimension à E_k), et sur E_{k+1} , on définit la semi-norme

$$\|\eta + \lambda \xi_{k+1}\| = \lim_{\mathcal{U}} \|\eta + \lambda a_n\| \quad \text{pour } \eta \in E_k, \lambda \in \mathbf{R}.$$

On écrit $\eta = x + \lambda_1 \xi_1 + \dots + \lambda_k \xi_k$ ($x \in E, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbf{R}$) d'où

$$\begin{aligned} \|x + \lambda_1 \xi_1 + \dots + \lambda_k \xi_k + \lambda \xi_{k+1}\| &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \mathcal{U}}} \|x + \lambda a_n + \lambda_1 \xi_1 + \dots + \lambda_k \xi_k\| \\ &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \mathcal{U}}} (\lambda_1 \sigma_1 * \dots * \lambda_k \sigma_k)(\lambda a_n + x) = (\lambda_1 \sigma_1 * \dots * \lambda_k \sigma_k * \lambda \sigma_{k+1})(x) \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

En particulier, la donnée d'un type σ sur E permet de construire (dans un espace de Banach $F \supset E$) une suite $\xi_1, \dots, \xi_k, \dots$ de vecteurs indépendants sur E , réalisant tous le type σ sur E ; l'espace engendré par $E, \xi_1, \dots, \xi_k, \dots$ est unique à isométrie près. On l'appellera le *modèle étalé sur E* associé au type σ . Pour tout $x \in E$, la quantité $\|x + \lambda_1 \xi_1 + \dots + \lambda_k \xi_k\|$ est alors invariante par permutation des λ_i ($1 \leq i \leq k$) puisqu'elle vaut $(\lambda_1 \sigma * \dots * \lambda_k \sigma)(x)$.

Un type σ sur l'espace de Banach E sera dit *symétrique* si $\sigma(-x) = \sigma(x)$ pour tout $x \in E$ (autrement dit, si $\sigma = -\sigma$ en appliquant la définition de la multiplication d'un type par -1). Le seul type symétrique réalisé dans E est $\mathbf{0}$ (si $\|a + x\| = \|a - x\|$ pour tout $x \in E$, et si $a \in E$, alors $a = 0$).

L'espace \mathcal{S} des types symétriques sur E est un fermé de \mathcal{T} . Si E est de dimension infinie, il n'est pas réduit à $\mathbf{0}$ (c'est essentiellement montré dans [9]); lorsque E est un espace stable, c'est d'ailleurs immédiat: on prend une suite $a_n \in E, \|a_n\| = 1$ sans sous-suite convergente, et un ultrafiltre \mathcal{U} non trivial sur \mathbf{N} . On a ainsi le type $\sigma = \lim_{\mathcal{U}} a_n$ que l'on réalise par deux vecteurs ξ_1, ξ_2 indépendants sur E . Alors $\xi_1 - \xi_2$ réalise un type symétrique sur E (c'est $\sigma * (-\sigma)$): car, si $x \in E$, on a $\|x + \xi_1 - \xi_2\| = \|x - \xi_1 + \xi_2\|$ (la norme est invariante par échange de ξ_1 et ξ_2). Or ce type n'est pas nul: sinon $\|\xi_1 - \xi_2\| = 0$, donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\xi_1 - a_n\| = 0,$$

ce qui montre que la suite a_n a une sous-suite qui converge (vers ξ_1) contrairement à l'hypothèse.

Soient σ un type symétrique non nul sur l'espace stable E , et $\xi_1, \dots, \xi_k, \dots$ une suite de vecteurs indépendants sur E réalisant le type σ . Alors, pour $x \in E$, la quantité $\|x + \lambda_1 \xi_1 + \dots + \lambda_k \xi_k\|$ est invariante par permutation des λ_i , et changement de λ_i en $\varepsilon_i \lambda_i$ ($\varepsilon_i = \pm 1$) (en effet, elle vaut $(\lambda_1 \sigma * \dots * \lambda_k \sigma)(x)$ et on a $\sigma = -\sigma$). En particulier, $\xi_1, \dots, \xi_k, \dots$ est une suite basique inconditionnelle de constante 1.

Un type symétrique σ non nul sur l'espace stable E sera appelé un l^p -type (resp. un c_0 -type) si on a $\alpha \sigma * \beta \sigma = (\alpha^p + \beta^p)^{1/p} \sigma$ (resp. $\alpha \sigma * \beta \sigma = \sup(\alpha, \beta) \sigma$) pour $\alpha, \beta \in \mathbf{R}_+$. Si $\xi_1, \dots, \xi_k, \dots$ sont des vecteurs indépendants sur E , réalisant le type σ , on a donc

$$\left\| x + \sum_{i=1}^k \lambda_i \xi_i \right\| = \left\| x + \left(\sum_{i=1}^k |\lambda_i|^p \right)^{1/p} \xi_1 \right\| \quad \left(\text{resp. } \left\| x + \left(\sup_{i=1}^k |\alpha_i| \right) \xi_1 \right\| \right)$$

pour $x \in E$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbf{R}$. Le type réalisé par ξ_{k+1} sur l'espace E_k engendré par E, ξ_1, \dots, ξ_k est donc un l^p -type (resp. c_0 -type) sur E_k .

LEMME III.1. *Soient E un espace stable, et σ un type symétrique non nul sur E . Pour que σ soit un c_0 -type ou un l^p -type pour $p \geq 1$, il faut et il suffit que, pour tout $\alpha \in \mathbf{R}_+$, il existe $\beta \in \mathbf{R}_+$ tel que $\sigma * \alpha \sigma = \beta \sigma$.*

Il est clair que la condition est nécessaire. Soit alors σ satisfaisant cette condition. En remplaçant σ par $\sigma(0)^{-1} \sigma$, on peut supposer $\sigma(0) = 1$. Soient ξ_1, ξ_2, ξ_3 , trois vecteurs indépendants sur E réalisant le type σ . On a donc $\|\xi_i\| = 1$ ($i = 1, 2, 3$). Par hypothèse, pour tout $\alpha \geq 0$, il existe $\beta \geq 0$ tel que $\|x + \xi_1 + \alpha \xi_2\| = \|x + \beta \xi_1\|$ pour tout $x \in E$. Par homogénéité on en déduit que, pour $\lambda, \mu \geq 0$, il existe un réel $\phi(\lambda, \mu) \geq 0$ tel que $\|x + \lambda \xi_1 + \mu \xi_2\| = \|x + \phi(\lambda, \mu) \xi_1\|$ pour tout $x \in E$; donc $\lambda \sigma * \mu \sigma = \phi(\lambda, \mu) \sigma$.

L'espace E' engendré par ξ_1, ξ_2, ξ_3 est un espace normé réticulé de dimension 3. Si $u, v \in E'$ sont étrangers alors $\|u + v\| = \phi(\|u\|, \|v\|)$; en effet, puisque ξ_1, ξ_2, ξ_3 sont permutables il y a seulement deux possibilités: $u = \lambda \xi_1, v = \mu \xi_2$, et alors $\|u + v\| = \phi(\lambda, \mu) = \phi(\|u\|, \|v\|)$, $u = \lambda \xi_1, v = \mu \xi_2 + \nu \xi_3$, et alors $\|u + v\| = \|\lambda \xi_1 + \mu \xi_2 + \nu \xi_3\| = (\lambda \sigma * \mu \sigma * \nu \sigma)(0) = (\lambda \sigma * \phi(\mu, \nu) \sigma)(0) = \phi(\lambda, \phi(\mu, \nu))$; or $\lambda = \|u\|$ et $\phi(\mu, \nu) = \|v\|$, donc $\|u + v\| = \phi(\|u\|, \|v\|)$.

D'après un résultat de Bohnenblust [2] (ou [12], p. 18), il en résulte que l'on a soit $\phi(\lambda, \mu) = \sup(\lambda, \mu)$, soit $\phi(\lambda, \mu) = (\lambda^p + \mu^p)^{1/p}$ pour $p \geq 1$. D'où le résultat cherché puisqu'on a vu que $\lambda \sigma * \mu \sigma = \phi(\lambda, \mu) \sigma$ pour $\lambda, \mu \in \mathbf{R}_+$.

THÉORÈME III.1. *Soient E un espace de Banach stable, σ un l^p -type (resp. c_0 -type) sur E ($p \geq 1$) avec $\sigma = \lim_{\mathcal{U}} a_n$ ($a_n \in E$, \mathcal{U} ultrafiltre sur \mathbb{N}). Alors il existe une sous-suite b_n de la suite a_n qui est équivalente à la base canonique de l^p (resp. c_0), et plus précisément, telle que l'on ait*

$$(1 - 2^{-k}) \left(\sum_{n \geq k} |\lambda_n|^p \right)^{1/p} \leq \left\| \sum_{n \geq k} \lambda_n b_n \right\| \leq (1 + 2^{-k}) \left(\sum_{n \geq k} |\lambda_n|^p \right)^{1/p}$$

$$\left(\text{resp. } (1 - 2^{-k}) \sup_{n \geq k} |\lambda_n| \leq \left\| \sum_{n \geq k} \lambda_n b_n \right\| \leq (1 + 2^{-k}) \sup_{n \geq k} |\lambda_n| \right),$$

pour toute suite λ_n de réels nuls sauf un nombre fini.

REMARQUE. On déduit immédiatement de ce théorème que sur un espace stable E , il n'existe pas de c_0 -type: sinon E contiendrait un sous-espace $(1 + \varepsilon)$ isomorphe à c_0 , et on a vu plus haut qu'un tel espace n'est pas stable.

On utilise la proposition suivante, qui énonce une propriété des types sur un espace de Banach quelconque:

PROPOSITION III.1. *Soient $\tau = \lim_{\mathcal{U}} a_n$ un type sur l'espace de Banach E ($a_n \in E$, \mathcal{U} ultrafiltre sur \mathbb{N}), F un sous-espace de E de dimension finie, et $\varepsilon, M > 0$. Alors il existe n tel que l'on ait $|\tau(x) - \|x + a_n\|| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in F$, $\|x\| \leq M$.*

En effet, $\{x \in F; \|x\| \leq M\}$ est un compact K . La suite f_n de fonctions définies sur K par $f_n(x) = \|x + a_n\|$ est équicontinue, donc converge uniformément suivant l'ultrafiltre \mathcal{U} (théorème d'Ascoli). Comme cette suite converge simplement vers la fonction τ , celle-ci est donc sa limite uniforme. C.Q.F.D.

PREUVE DU THÉORÈME III.1. On suppose $\|a_n\| = 1$ pour tout n ; soient ξ, ξ_1 deux vecteurs indépendants sur E réalisant le type σ sur E . On définit par récurrence la sous-suite b_1, \dots, b_m, \dots de la suite a_n , de la façon suivante: ayant défini b_1, \dots, b_m , soit E_n le sous-espace de E qu'ils engendrent. Si $y = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n \in E_n$ on pose $\bar{y} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in l^n_p$ (donc $\|\bar{y}\| = (|\lambda_1|^p + \dots + |\lambda_n|^p)^{1/p}$). Pour $1 \leq m \leq n$, on désigne par $E_{m,n}$ l'espace engendré par b_m, b_{m+1}, \dots, b_n . On suppose (hypothèse de récurrence) qu'on a:

(i)
$$\left| \|y + \lambda \xi\| - (\|\bar{y}\|^p + |\lambda|^p)^{1/p} \right| \leq \varepsilon_{m,n} (\|\bar{y}\|^p + |\lambda|^p)^{1/p}$$

quels que soient $y \in E_{m,n}$, $1 \leq m \leq n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$; avec $\varepsilon_{m,n} = 2^{-m} + 2^{-m-1} + \dots + 2^{-n}$. On applique alors la proposition III.1 au type τ réalisé par le vecteur ξ_1 sur l'espace $E + \mathbb{R}\xi$ (engendré par E et ξ) et au sous-espace de dimension finie

$E_n + \mathbf{R}\xi$. On prend $\varepsilon = 2^{-n-2}$ et $M = 2/\varepsilon = 2^{n+3}$. On détermine donc ainsi un élément de la suite (a_n) qu'on note b_{n+1} tel que l'on ait:

$$\left| \|y + \alpha\xi + \xi_1\| - \|y + \alpha\xi + b_{n+1}\| \right| \leq \varepsilon \quad \text{pour } y \in E_n$$

et $\alpha \in \mathbf{R}$ tels que $\|y + \alpha\xi\| \leq 2/\varepsilon$.

Comme $\left| \|y + \alpha\xi + \xi_1\| - \|y + \alpha\xi + b_{n+1}\| \right| \leq \|\xi_1 - b_{n+1}\| \leq 2$ (inégalité triangulaire), on en déduit que:

$$\left| \|y + \alpha\xi + \xi_1\| - \|y + \alpha\xi + b_{n+1}\| \right| \leq \sup\{\varepsilon, \varepsilon \|y + \alpha\xi\|\}$$

(comme on le voit en examinant les cas $\|y + \alpha\xi\| \leq 2/\varepsilon$, $\|y + \alpha\xi\| > 2/\varepsilon$)

$$\leq \varepsilon \|y + \alpha\xi + \xi_1\|$$

(car σ est un type symétrique donc $\|y + \alpha\xi + \xi_1\| = \|y \pm \alpha\xi \pm \xi_1\|$). Par homogénéité on en déduit

$$(ii) \quad \left| \|y + \alpha\xi + \beta\xi_1\| - \|y + \alpha\xi + \beta b_{n+1}\| \right| \leq \varepsilon \|y + \alpha\xi + \beta\xi_1\|$$

quels que soient $y \in E_n$ et $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

Comme σ est un l^p -type sur E , on a

$$\|y + \alpha\xi + \beta\xi_1\| = \|y + (|\alpha|^p + |\beta|^p)^{1/p} \xi\|.$$

D'après l'hypothèse de récurrence (i) on a:

$$(iii) \quad \left| \|y + (|\alpha|^p + |\beta|^p)^{1/p} \xi\| - (\|\bar{y}\|^p + |\alpha|^p + |\beta|^p)^{1/p} \right| \leq \varepsilon_{m,n} (\|\bar{y}\|^p + |\alpha|^p + |\beta|^p)^{1/p}$$

pour tout $y \in E_{m,n}$ ($1 \leq m \leq n$). On en déduit donc, d'après (ii):

$$\left| \|y + \beta b_{n+1} + \alpha\xi\| - (\|\bar{y}\|^p + |\alpha|^p + |\beta|^p)^{1/p} \right| \leq \varepsilon \|y + \alpha\xi + \beta\xi_1\| + \varepsilon_{m,n} (\|\bar{y}\|^p + |\alpha|^p + |\beta|^p)^{1/p}.$$

Or

$$\|y + \alpha\xi + \beta\xi_1\| = \|y + (|\alpha|^p + |\beta|^p)^{1/p} \xi\| \leq (1 + \varepsilon_{m,n}) (\|\bar{y}\|^p + |\alpha|^p + |\beta|^p)^{1/p}$$

d'après (iii). En substituant dans l'inégalité précédente, on obtient

$$\left| \|y + \beta b_{n+1} + \alpha\xi\| - (\|\bar{y}\|^p + |\alpha|^p + |\beta|^p)^{1/p} \right| \leq [\varepsilon(1 + \varepsilon_{m,n}) + \varepsilon_{m,n}] (\|\bar{y}\|^p + |\alpha|^p + |\beta|^p)^{1/p}.$$

Comme $\varepsilon = 2^{-n-2}$ et $\varepsilon_{m,n} = 2^{-m} + 2^{-m-1} + \dots + 2^{-n}$, on a $\varepsilon(1 + \varepsilon_{m,n}) + \varepsilon_{m,n} \leq \varepsilon_{m,n+1}$. On a ainsi montré que:

$$\left| \|z + \alpha\xi\| - (\|\bar{z}\|^p + |\alpha|^p)^{1/p} \right| \leq \varepsilon_{m,n+1} (\|\bar{z}\|^p + |\alpha|^p)^{1/p}$$

quel que soit $z \in E_{m,n+1}$, $1 \leq m \leq n$ et $\alpha \in \mathbf{R}$.

Il reste donc à montrer cette inégalité pour $m = n + 1$. Dans ce cas $z \in E_{n+1,n+1}$, c'est-à-dire $z = \beta b_{n+1}$ et l'inégalité (ii) avec $y = 0$ donne:

$$\left| \|\beta b_{n+1} + \alpha\xi\| - (|\beta|^p + |\alpha|^p)^{1/p} \right| \leq \varepsilon (|\alpha|^p + |\beta|^p)^{1/p}$$

d'où le résultat car $\varepsilon = 2^{-n-2} \leq \varepsilon_{n+1,n+1} = 2^{-n-1}$.

On a ainsi donné une définition par récurrence de la suite (b_n) , sous-suite de la suite (a_n) , telle que (i) soit satisfait quels que soient n et m , $1 \leq m \leq n$. Pour $\lambda = 0$, l'inégalité (i) donne alors le résultat cherché. C.Q.F.D.

REMARQUE. La démonstration n'a été faite que lorsque σ est un l^p -type; elle s'applique aussi, avec les modifications évidentes dans les inégalités (faire $p = \infty$ à la façon habituelle) lorsque σ est un c_0 -type.

Partie IV

On se propose dans cette section de montrer le

THÉORÈME IV.1. *Si E est un espace de Banach stable de dimension infinie, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il contient un sous-espace $(1 + \varepsilon)$ -isomorphe à l^p pour un certain p , $1 \leq p < +\infty$.*

Nous énonçons tout d'abord une proposition simple sur les points frontières du spectre d'un opérateur, qui sera utilisée dans la suite; pour la commodité du lecteur, on en rappelle la démonstration.

PROPOSITION IV.1. *Soient E un espace de Banach sur \mathbf{R} (resp. sur \mathbf{C}), $T : E \rightarrow E$ un opérateur linéaire continu et $\lambda \in \mathbf{R}$ (resp. \mathbf{C}) un point frontière du spectre de T . Alors il existe une suite $x_n \in E$, $\|x_n\| = 1$ telle que $\|Tx_n - \lambda x_n\| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.*

L'hypothèse sur λ signifie donc que $T - \lambda I$ n'est pas inversible, mais qu'il existe des λ' , aussi voisins qu'on veut de λ tels que $T - \lambda' I$ soit inversible.

En remplaçant T par $T - \lambda I$, on peut supposer que $\lambda = 0$. S'il n'existe aucune suite $x_n \in E$, $\|x_n\| = 1$ telle que $\|Tx_n\| \rightarrow 0$, c'est qu'il existe $c > 0$ tel que $\|Tx\| \geq c\|x\|$ pour tout $x \in E$. Comme T est borné, T est un isomorphisme de E sur un sous-espace fermé E' . On a $E' \neq E$ puisque T n'est pas inversible. Soient $x_0 \in E$ à une distance ≥ 1 de E' , et α_n une suite de réels tendant vers 0 tels que $T - \alpha_n I$ soit inversible. Il existe donc $u_n \in E$ tel que $Tu_n - \alpha_n u_n = x_0$. Alors

$\|\alpha_n u_n\| = \|Tu_n - x_0\| \geq 1$ donc $\|u_n\| \rightarrow \infty$. En posant $v_n = u_n / \|u_n\|$, on a $\|v_n\| = 1$ et $Tv_n - \alpha_n v_n = x_0 / \|u_n\|$, donc $\|Tv_n\| \rightarrow 0$. C.Q.F.D.

Pour montrer le théorème IV.1, considérons un espace stable E de dimension infinie. D'après le théorème III.1, il suffit de montrer qu'il existe sur E un type σ qui est soit un l^p -type, soit un c_0 -type. D'après le lemme III.1, on est donc ramené à montrer le théorème suivant:

THÉORÈME IV.2. *Soit E un espace de Banach stable de dimension infinie. Alors il existe sur E un type σ symétrique non nul tel que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$ il existe $\beta \in \mathbb{R}_+$ avec $\sigma * \alpha\sigma = \beta\sigma$.*

On désigne par \mathcal{S} l'espace localement compact (fermé dans l'espace des types \mathcal{T}) des types symétriques sur E . Comme E est de dimension infinie, on a $\mathcal{S} \neq \{0\}$.

Etant donnés $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, une suite $\sigma_n \in \mathcal{S}$ sera dite (α, β) -approximante si on a $|(\sigma_n * \alpha\sigma_n)(x) - (\beta\sigma_n)(x)| \leq 1/n$ quels que soient $x \in E$ et $n \geq 1$.

LEMME IV.1. *Si la suite σ_n est (α, β) -approximante alors on a*

$$|(\sigma_n * \alpha\sigma_n * \tau)(x) - (\beta\sigma_n * \tau)(x)| \leq 1/n$$

quels que soient le type $\tau \in \mathcal{T}$, $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}$.

En effet, on a $\tau = \lim_{\mathcal{V}} b_k$, $b_k \in E$: or, par hypothèse

$$|(\sigma_n * \alpha\sigma_n)(b_k + x) - (\beta\sigma_n)(b_k + x)| \leq 1/n$$

quel que soit $x \in E$.

Il suffit alors de faire tendre k vers $+\infty$ suivant l'ultrafiltre \mathcal{V} pour obtenir l'inégalité cherchée. C.Q.F.D.

LEMME IV.2. *Soient σ_m, τ_n deux suites (α, β) -approximantes et $\sigma_{m,n} = \sigma_m * \tau_n$. Alors, pour tout $x \in E$, on a*

$$|(\sigma_{m,n} * \alpha\sigma_{m,n})(x) - (\beta\sigma_{m,n})(x)| \leq 1/m + 1/n.$$

D'après le lemme précédent, on a $|(\sigma_m * \alpha\sigma_m * \tau)(x) - (\beta\sigma_m * \tau)(x)| \leq 1/m$ quel que soit le type τ sur E . On prend $\tau = \tau_n * \alpha\tau_n$. D'après les propriétés du produit de convolution, on obtient:

(i)
$$|(\sigma_m * \tau_n * \alpha(\sigma_m * \tau_n))(x) - (\beta\sigma_m * \tau_n * \alpha\tau_n)(x)| \leq 1/m$$

mais la suite τ_n étant (α, β) -approximante, on a, d'après le même lemme:

$$|(\tau_n * \alpha\tau_n * \tau)(x) - (\beta\tau_n * \tau)(x)| \leq 1/n.$$

On prend ici $\tau = \beta\sigma_m$, ce qui donne:

$$|(\beta\sigma_m * \tau_n * \alpha\tau_n)(x) - \beta(\sigma_m * \tau_n)(x)| \leq 1/n.$$

En combinant cette inégalité avec (i) on obtient le résultat cherché. C.Q.F.D.

Une partie C non vide de \mathcal{S} sera appelée *une classe conique* si:

- (a) C est fermée et $\neq \{0\}$,
- (b) si $\sigma \in C$, alors $\lambda\sigma \in C$ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}_+$,
- (c) si $\sigma, \tau \in C$, alors $\sigma * \tau \in C$.

On pose $\mathcal{S}_1 = \{\sigma \in \mathcal{S}; \sigma(0) = 1\}$; \mathcal{S}_1 est une partie compacte de \mathcal{S} ; $C \cap \mathcal{S}_1$ est donc compact et non vide (prendre $\sigma \in C$, $\sigma \neq 0$ et considérer le type $\sigma(0)^{-1}\sigma$). Par ailleurs, une classe conique C est déterminée par son intersection avec \mathcal{S}_1 , puisqu'on a évidemment $C = \{\lambda\sigma; \lambda \in \mathbf{R}_+, \sigma \in C \cap \mathcal{S}_1\}$.

LEMME IV.3. *Toute classe conique contient une classe conique minimale.*

Il suffit d'appliquer le théorème de Zorn à l'ensemble des classes coniques ordonné par l'inclusion.

Si \mathcal{X} est un ensemble ordonné de classes coniques, alors $\bigcap_{C \in \mathcal{X}} C \neq \{0\}$, car $\bigcap_{C \in \mathcal{X}} C \cap \mathcal{S}_1 \neq \emptyset$ (intersection d'une famille totalement ordonnée de compacts non vides). Donc $\bigcap_{C \in \mathcal{X}} C$ est une classe conique qui est un minorant de \mathcal{X} .

C.Q.F.D.

LEMME IV.4. *Soient C une classe conique et $\alpha \geq 0$. Alors il existe $\beta \geq 1$ et une suite $\sigma_n \in C \cap \mathcal{S}_1$ qui est (α, β) -approximante.*

On prend un type $\sigma \in C$, $\sigma(0) = 1$ et on considère une suite $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ de vecteurs indépendants sur E , réalisant tous le type σ sur E . Si $u = \lambda_1\xi_1 + \dots + \lambda_n\xi_n$ est une combinaison linéaire des ξ_i , alors le type réalisé par u sur E est $(\lambda_1\sigma) * \dots * (\lambda_n\sigma)$, donc est dans C .

Soit H le complété de l'espace engendré par $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$; la suite (ξ_n) est une base symétrique inconditionnelle (de constante 1) de H . On définit un opérateur $T : H \rightarrow H$ en posant $T\xi_n = \xi_{2n} + \alpha\xi_{2n+1}$; d'après la symétrie de la base ξ_n , on a immédiatement $\|u\| \leq \|Tu\| \leq (1 + \alpha)\|u\|$ pour tout $u \in H$. Par ailleurs, on a évidemment $\|Tu - \xi_1\| \geq 1$ pour tout $u \in H$, donc T n'est pas inversible. Il en résulte que le spectre de T a des points frontière qui sont réels ≥ 0 . Soit $\beta \geq 0$ un tel point frontière et u_n une suite d'éléments de H , $\|u_n\| = 1$, telle que $\|Tu_n - \beta u_n\| \leq 1/n$ (proposition IV.1). On peut évidemment supposer que chaque u_n est combinaison linéaire (finie) des ξ_i . On a $\beta \geq 1$ car $\|Tu_n\| \geq \|u_n\| = 1$ et $\|Tu_n\| \rightarrow \beta$. Soit $\sigma_n \in C$ le type réalisé sur E par u_n . Pour tout $x \in E$ on a $|\|Tu_n + x\| - \|\beta u_n + x\|| \leq \|Tu_n - \beta u_n\| \leq 1/n$. Or il est clair que le type réalisé sur E par Tu_n est $\sigma_n * \alpha\sigma_n$, ce qui donne $|(\sigma_n * \alpha\sigma_n)(x) - (\beta\sigma_n)(x)| \leq 1/n$, quel que soit $x \in E$. La suite σ_n est donc (α, β) -approximante. C.Q.F.D.

LEMME IV.5. Soient C une classe conique minimale, et $\alpha \geq 0$. Alors il existe $\beta \geq 1$ tel que tout point de C soit limite d'une suite (α, β) -approximante d'éléments de C .

D'après le lemme précédent, on peut choisir $\beta \geq 1$ tel qu'il existe dans C une suite σ_n qui est (α, β) -approximante et telle que $\sigma_n \in \mathcal{S}_1$; β étant ainsi fixé, désignons par C' l'ensemble des $\sigma \in C$ qui sont limite d'une suite (α, β) -approximante d'éléments de C . Il suffit de montrer que C' est une classe conique; en effet, par minimalité de C , on aura alors $C = C'$, ce qui est la conclusion cherchée.

Comme \mathcal{S}_1 est compact, il y a une sous-suite des σ_n qui converge vers $\sigma \in \mathcal{T} \cap \mathcal{S}_1$. Comme une sous-suite d'une suite (α, β) -approximante l'est aussi, on voit que $\sigma \in C'$. Comme $\sigma \neq 0$, on a montré que $C' \neq \{0\}$.

C' est fermé: soit σ_m une suite dans C' , $\sigma_m \rightarrow \sigma$; donc $\sigma \in C$. Pour chaque m on a une suite approximante $\sigma_{m,n}$ qui tend vers σ_m quand $n \rightarrow \infty$. On peut donc choisir un entier $n(m) \geq m$ tel que $d(\sigma_{m,n(m)}, \sigma_m) \leq 2^{-m}$ (d étant une distance sur \mathcal{T} qui définit la topologie de \mathcal{T}). Posons $\tau_m = \sigma_{m,n(m)}$; évidemment $\tau_m \rightarrow \sigma$. Par ailleurs, pour tout $x \in E$, on a

$$|(\tau_m * \alpha \tau_m)(x) - (\beta \tau_m)(x)| \leq 1/n(m) \leq 1/m,$$

donc τ_m est une suite (α, β) -approximante.

Si $\sigma \in C'$ et $\lambda \geq 0$, alors $\lambda \sigma \in C'$

Soit σ_m une suite (α, β) -approximante tendant vers σ . On a

$$|(\lambda \sigma_m * \alpha \lambda \sigma_m)(x) - (\beta \lambda \sigma_m)(x)| = \lambda |(\sigma_m * \alpha \sigma_m)(x/\lambda) - (\beta \sigma_m)(x/\lambda)| \leq \lambda/m$$

quel que soit $x \in E$. Par suite, si k_0 est un entier $\geq \lambda$, la suite $\lambda \sigma_{k_0 m}$ est (α, β) -approximante. Comme elle tend vers $\lambda \sigma$, on a $\lambda \sigma \in C'$.

Si $\sigma, \tau \in C'$ alors $\sigma * \tau \in C'$

Soient $\sigma_m, \tau_n \in C$, deux suites (α, β) -approximantes tendant respectivement vers σ, τ . Alors $\sigma_m * \tau_n \rightarrow \sigma * \tau$ (le produit de convolution est séparément continu). Pour m fixé, $\sigma_m * \tau_n \rightarrow \sigma_m * \tau$ quand $n \rightarrow \infty$. Pour chaque m , on peut donc choisir $n(m) \geq m$ tel que $d(\sigma_m * \tau_{n(m)}, \sigma_m * \tau) \leq 2^{-m}$. Alors $\sigma'_m = \sigma_m * \tau_{n(m)}$ tend vers $\sigma * \tau$ quand $m \rightarrow \infty$. Par ailleurs, d'après le lemme IV.2, on a pour tout $x \in E$:

$$|(\sigma'_m * \alpha \sigma'_m)(x) - (\beta \sigma'_m)(x)| \leq 1/m + 1/n(m) \leq 2/m.$$

Cela montre que la suite σ'_m est (α, β) -approximante. Donc sa limite $\sigma * \tau$ est dans C' .

C.Q.F.D.

LEMME IV.6. Soit C une classe conique minimale. Alors il existe $\sigma \in C$, $\sigma \neq 0$ avec la propriété suivante : pour tout $\alpha \geq 0$, il existe $\beta \geq 1$ tel que $\sigma * \alpha\sigma = \beta\sigma$.

Soit $\mathcal{S}'_1 = \{\sigma \in \mathcal{S}; \sigma(0) \leq 1\}$ qui est un espace compact. Pour chaque $\alpha \in \mathbb{Q}^+$ et $a \in \Delta$ (partie dénombrable dense de E), on définit la fonction $\psi_{\alpha,a} : \mathcal{S}'_1 \rightarrow \mathbb{R}_+$ en posant $\psi_{\alpha,a}(\sigma) = (\sigma * \alpha\sigma)(a)$. La fonction $(\sigma, \tau) \rightarrow (\sigma * \alpha\tau)(a)$ étant séparément continue sur $\mathcal{S}'_1 \times \mathcal{S}'_1$ est de première classe de Baire sur cet espace (lemme II.1). Il en résulte que $\psi_{\alpha,a}$ est de première classe de Baire sur \mathcal{S}'_1 , donc aussi évidemment sur le sous-espace $\mathcal{S}''_1 \cap C$, où $\mathcal{S}''_1 = \{\sigma \in \mathcal{S}; 0 < \sigma(0) < 1\}$. Or $\mathcal{S}''_1 \cap C$ est ouvert dans le compact $\mathcal{S}'_1 \cap C$, donc est un espace de Baire. Il existe donc un point $\tilde{\sigma}$ de cet espace qui est point de continuité pour toutes les fonctions de la famille dénombrable $(\psi_{\alpha,a})_{\alpha \in \mathbb{Q}^+, a \in \Delta}$ (considérées comme fonctions sur $\mathcal{S}''_1 \cap C$) qui sont des fonctions de première classe de Baire.

Soit $\alpha \in \mathbb{Q}^+$; d'après le lemme IV.5 il existe $\beta \geq 1$ et une suite $\sigma_n \in C$, (α, β) -approximante et tendant vers $\tilde{\sigma}$. Comme $\mathcal{S}''_1 \cap C$ est, dans C , un voisinage ouvert de $\tilde{\sigma}$, on voit que $\psi_{\alpha,a}(\sigma_n) \rightarrow \psi_{\alpha,a}(\tilde{\sigma})$. Or

$$|(\sigma_n * \alpha\sigma_n)(a) - (\beta\sigma_n)(a)| \rightarrow 0, \quad (\beta\sigma_n)(a) \rightarrow (\beta\tilde{\sigma})(a) \quad \text{et}$$

$$(\sigma_n * \alpha\sigma_n)(a) = \psi_{\alpha,a}(\sigma_n) \rightarrow \psi_{\alpha,a}(\tilde{\sigma}) = (\tilde{\sigma} * \alpha\tilde{\sigma})(a).$$

Il en résulte que, pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}_+$, il existe $\beta \geq 1$, tel que, pour tout $a \in \Delta$ on ait $(\tilde{\sigma} * \alpha\tilde{\sigma})(a) = (\beta\tilde{\sigma})(a)$. Comme Δ est dense dans E , on a $\tilde{\sigma} * \alpha\tilde{\sigma} = \beta\tilde{\sigma}$. Si maintenant on prend $\alpha \in \mathbb{R}_+$, soit $\alpha_n \in \mathbb{Q}_+$, $\alpha_n \rightarrow \alpha$, d'où $\tilde{\sigma} * \alpha_n\tilde{\sigma} = \beta_n\tilde{\sigma}$. On a $\tilde{\sigma} \neq 0$ (car $\tilde{\sigma} \in \mathcal{S}''_1$) donc $\tilde{\sigma}(0) > 0$. La suite $\beta_n\tilde{\sigma}(0)$ étant bornée, la suite β_n l'est aussi; en prenant une sous-suite, on peut supposer que $\beta_n \rightarrow \beta$. Donc $\tilde{\sigma} * \alpha\tilde{\sigma} = \beta\tilde{\sigma}$.

C.Q.F.D.

Le théorème IV.2 résulte immédiatement des lemmes IV.3 et IV.6. Cela termine la preuve du théorème IV.1.

BIBLIOGRAPHIE

1. D. J. Aldous, *Subspaces of L^1 via random measures*, à paraître.
2. H. F. Bohnenblust, *An axiomatic characterization of L_p -spaces*, Duke Math. J. **6** (1940), 627-640.
3. J. Bretagnolle, D. Dacunha-Castelle et J.-L. Krivine, *Lois stables et espaces L^p* , Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A **2** (1966), 231-259.
4. D. Dacunha-Castelle et J.-L. Krivine, *Sous-espaces de L^1* , Israel J. Math. **26** (1977), 320-351.
5. W. J. Davis, T. Figiel, W. B. Johnson et A. Pelczynski, *Factoring weakly compact operators*, J. Functional Analysis **17** (1974), 311-327.
6. D. J. H. Garling, *Stable Banach spaces*, à paraître.
7. S. Guerre et J. T. Lapresté, *Quelques propriétés des espaces de Banach stables*, Israel J. Math. **39** (1981), 247-254.
8. R. C. James, *Uniformly non-square Banach spaces*, Ann. of Math. **80** (1964), 542-550.

9. J.-L. Krivine, *Sous-espaces de dimension finie des espaces de Banach réticulés*, Ann. of Math. **104** (1976), 1–29.
10. J.-L. Krivine et B. Maurey, *Espaces de Banach stables*, CRAS Paris **298** (1979), 679–681.
11. J. Lindenstrauss et L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces I*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **92**, Springer Verlag, 1977.
12. J. Lindenstrauss et L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces II*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **97**, Springer Verlag, 1979.
13. B. Maurey, *Tout sous-espace de L^1 contient un l_p* , d'après D. Aldous Séminaire d'Analyse Fonctionnelle 1979–80, exposés I–II, Ecole Polytechnique, Paris.
14. Y. Raynaud, Thèse de 3^{ème} cycle, Paris VII, 1980.

UNIVERSITÉ PARIS VII

U.E.R. DE MATHÉMATIQUES

75251 PARIS CEDEX 05, FRANCE